Dodatkowe twierdzenia

1 Teoria

Definition 1.1 *Niech* (Ω, A, P) *będzie przestrzenią probabilistyczną. Niech* X *będzie zmienną losową o funkcji gęstości* f*. Niech* $M_X(t)$ *będzie funkcją generującą momenty zmiennej losowej* X *daną wzorem:*

$$M_X(t) = Ee^{tX}.$$

Funkcję

$$\varphi_X(t) := M_X(it)$$

nazywamy funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X*.*

Theorem 1.2 *Załóżmy, że* X *jest* $d-$ *wymiarową zmienną losową. Wówczas* φ_X *jest dobrze określona na całym* $\mathbb{R}^d$*, ponadto* $\varphi_X(0) = 1$ *oraz*

$$|\varphi_X(t)| \leq E\left|e^{itX}\right| = 1.$$

Theorem 1.3 (Bochner) *Funkcja* $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu prawdopodobieństwa w* $\mathbb{R}^d$ *wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła, dodatnio określona oraz* $\varphi(0) = 1$*.*

Definition 1.4 *dodatnia określoność funkcji*

Theorem 1.5 *Niech* X *będzie zmienną losową o funkcji charakterystycznej* φ_X*. Wówczas jeżeli* $\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_X(t)| < \infty$*, to* X *ma ciągłą ograniczoną gęstość* g *daną wzorem*

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-itx} \varphi_X(t)\, dt.$$